RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Nota II del Socio C. Segre.

5. Aggiungiamo che su una superficie non sviluppabile che verifichi un'equazione di Laplace, non solo non può svanire in ogni punto la coppia (7) delle tangenti alle caratteristiche (perchè A, B, C non possono essere tutte tre nulle identicamente); ma nemmeno può essere indeterminata la terna delle ulteriori tangenti principali. Invero questo fatto significherebbe che son nulle identicamente le 4 quantità (ξx^{pqr}), ove p, q, r valgono 1 o 2. La (39) di « *Sup* » (n. 20) ci darebbe: $(\xi^r x^{pq}) = 0$; e questa colle (36) e (37) proverebbe che tanto le ξ_i^1 quanto le ξ_i^2 soddisfano quelle stesse 6 equazioni lineari omogenee (1) e (8), che individuano i rapporti delle ξ_i. Ne seguirebbe, per ogni combinazione ik, $\xi_i^1 \xi_k - \xi_k^1 \xi_i = 0$, $\xi_i^2 \xi_k - \xi_k^2 \xi_i = 0$; e quindi i rapporti $\xi_i : \xi_k$ sarebbero costanti: la superficie starebbe in un iperpiano ξ fisso, contro l'ipotesi.

6. Vogliamo ora riconoscere, per una superficie *qualunque* F appartenente a S_5, quando avviene che in tutti i suoi punti le tangenti principali siano indeterminate.

In base al n. precedᵉ possiamo già escludere le superficie non sviluppabili soddisfacenti a un'equazione di Laplace. Di conseguenza (« *Sup.* » n. 5 e n. 13) per un punto generico x della F il cono quadrico V_4^2 (n. 1) sarà irriducibile. Ciò posto, ci conviene mutare il problema nel suo duale entro S_5 (cfr. « *Sup.* » n. 10, « *Prelimⁱ* » n. 22). In luogo della superficie F, avremo

una ∞^2 d'iperpiani; invece dei piani tangenti di F, il sistema Σ dei *piani caratteristici* di quella ∞^2 d'iperpiani. Al cono quadrico V_4^2 dianzi nominato risponderà la *conica focale* di un piano di Σ entro questo sistema ∞^2: tale conica nel caso attuale sarà dunque, per un piano generico, irriducibile. Quanto poi ai 5 iperpiani ξ del n. 1, essi si trasportano in 5 punti di quella conica focale, i quali, in base all'osservazione del n. 2, si potranno riguardare come intersezioni della conica stessa con coniche focali infinitamente vicine: dunque come *fochi di 2° ordine* per Σ (1). Così il nostro problema si trasforma in questo: quando è che, non solo 5, ma tutti i punti di ogni conica focale di Σ sono fochi di 2° ordine.

Ora a tale questione risponde appunto il n. 4 della mia ultima Nota, ora citata, quando lo si applichi alla projezione su un S_4 del sistema di piani Σ. Si vede così che Σ è l'insieme degli ∞^2 piani contenenti le coniche di una superficie del 4° ordine di Veronese. Per conseguenza il sistema dei piani tangenti di F, da cui Σ s'era ottenuto per dualità, sarà l'insieme dei piani tangenti di una superficie di Veronese: e quindi F sarà appunto una tal superficie. Otteniamo dunque il seguente risultato:

Le sole superficie appartenenti a S_5, *per le quali sono indeterminate in ogni punto le 5 tangenti principali, ossia per cui tutte le linee son linee principali, sono le superficie sviluppabili e la* F^4 *di Veronese.*

7. Il concetto di *linea principale* per una superficie di S_5 si può illustrare da un nuovo punto di vista, con la seguente considerazione, che è evidentemente capace di essere ulteriormente estesa.

Precisiamo l'*ordine infinitesimale di vicinanza*, per due piani infinitamente prossimi, di S_5, assumendoli in una ∞^1 di piani, che determiniamo con 3 punti $x\,y\,z$ funzioni di un parametro variabile t. Intenderemo cioè per « ordine di vicinanza » dei piani corrispondenti ai valori $t, t+dt$ del parametro, l'ordine infinitesimale, rispetto a dt come infinitesimo principale, del determinante

$$(9) \qquad |x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\ ,\ x(t+dt)\ ,\ y(t+dt)\ ,\ z(t+dt)|\ .$$

È subito visto che questo numero non muta, se sostituiamo x, y, z con 3 punti qualunque, non allineati, combinazioni lineari di quelli, a coefficienti funzioni di t.

Sviluppando $x(t+dt), \ldots$ secondo le potenze di dt, risulta che il 1° termine nello sviluppo di quel determinante sarà in generale dt^3 moltiplicato pel determinante $D = |x\,y\,z\ x'\,y'\,z'|$. Dunque: in generale la vicinanza di due piani successivi è *del 3° ordine*. — Perchè venga ad essere d'ordine

(1) Cfr. la mia Nota precedente, alla pag. 67 di questo vol. dei Rendiconti, *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti.*

superiore, dovrà annullarsi D. Supposto che ciò accada per ogni valore di t, s'annullerà pure la derivata di D: la quale è precisamente il coefficiente di $\frac{1}{2}dt^4$ nello sviluppo di (9). Vediamo così che *se in una* ∞^1 *di piani l'ordine di vicinanza di due piani successivi generici è superiore al 3°, esso sarà almeno uguale a* 5. Questo caso, dell'annullamento identico di D, avverrà (« *Prelim*ⁱ » § 1) quando la V_3 luogo degli ∞^1 piani ha lungo ogni piano un S_4 (od S_3) tangente, cioè ogni piano ha un foco (punto d'incidenza col piano successivo), sicchè: o tutti i piani son tangenti ad una stessa linea, luogo di quel foco; oppure passano tutti per uno stesso punto: il che escluderemo, non essendovi occasione allora ad ulteriori ricerche, perchè il determinante (9) riesce $\equiv 0$.

Siano dunque gli ∞^1 piani tangenti ad una stessa linea L, il cui punto variabile assumeremo per $x(t)$. Potremo allora prendere y in $x'(t)$; e il determinante (9), sviluppato, diventerà

$$|x(t)\ ,\ x'(t)\ ,\ z(t)\ ,\ x(t+dt)\ ,\ x'(t+dt)\ .\ z(t+dt)| =$$

$$= \frac{1}{12}dt^5\,|x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z'| + \frac{1}{24}dt^6\left\{|x\,x'\,x''\,x^{IV}\,z\,z'| + |x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z''|\right\} + \cdots$$

Perchè questo risulti sempre infinitesimo d'ordine superiore al 5° dev'essere identicamente

$$|x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z'| = 0. \tag{10}$$

Derivando, si vede che sarà nullo anche il coefficiente di dt^6; sicchè: *se l'ordine di vicinanza è superiore a* 5, *esso varrà almeno* 7. Ove la V_3 luogo degli ∞^1 piani non sia sviluppabile (ordinaria), e quindi sia determinato l'iperpiano che le è tangente lungo un piano generico $x\,x'\,z$, — iperpiano di questi punti e di $x''\,z'$, — la (10) dice che esso conterrà anche x''', cioè avrà contatto quadripunto in x colla L. (Se invece la V_3 è sviluppabile, ossia l'insieme dei piani osculatori di una linea, si potrà assumere z in $x''(t)$, e si riconosce subito che l'ordine di vicinanza di due piani successivi sale a 9).

In tal modo quelle varietà di ∞^1 piani, che s'erano già incontrate al n. 3 in relazione colle linee principali di F, risultan caratterizzate sotto un nuovo aspetto: in esse due piani successivi son più prossimi fra loro (ordine 7), che non nel caso generale (ordine 3), e nel caso di ∞^1 piani tangenti ad una linea, senz'altra particolarità (ordine 5).

Ritornando appunto al n. 3 e all'insieme dei piani tangenti di una superficie, potremo ora dire che: *mentre due piani tangenti successivi di una superficie hanno in generale vicinanza del 5° ordine, se i loro punti di contatto stanno su una stessa linea principale la vicinanza è del 7° ordine (almeno).* E il teorema finale del n. 6 si potrà anche enunciare così: *Se una superficie appartenente ad* S_5 *è tale che due piani tangenti successivi abbian sempre vici-*

nanza d'ordine superiore al 5°, *la superficie è sviluppabile* (l'ordine di vicinanza = 9), *oppure è la* F^4 *di Veronese* (l'ordine di vicinanza è infinito, perchè i piani tangenti sono a due a due incidenti).

8. Il fatto che l'ordine infinitesimale di vicinanza di due piani di S_5 salta da 3 a 5, da 5 a 7, da 7 a 9, rientra in una proposizione generale relativa agli S_k di S_{2k+1}, con k pari.

Introduciamo per questi S_k le coordinate di Grassmann: determinanti d'ordine $k+1$ estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti indipendenti. Indichiamole con p_r, ove r sia un numero $1, 2, \ldots, \binom{2k+2}{k+1}$, con cui si rappresenti una determinata permutazione di $k+1$ fra gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$ di quelle coordinate omogenee di punti. Anzi, indichino 1 e 2, come pure 3 e 4, e poi 5 e 6, ecc., delle permutazioni *complementari*, nel senso che, prese insieme nell'ordine indicato, costituiscano una permutazione pari di tutti gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$. Allora, *nell'ipotesi fatta che* k *sia pari*, il determinante delle coordinate dei $2k+2$ punti che determinano due S_k, p e q, si potrà scrivere come forma bilineare alternata delle coordinate di questi spazi: $[p, q] = (p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_3 q_4 - p_4 q_3) + \cdots$ [1]. E così il determinante analogo a (9), che serve a valutare l'ordine di vicinanza di due S_k, viene a rappresentarsi con $[p(t)\ ,\ p(t+dt)]$; che, sviluppando $p(t+dt)$ secondo le potenze di dt, diventa $\Sigma \frac{1}{a!}[p, p^a]\,dt^a$ (significando con p_r^a la derivata d'ordine a di p_r rispetto a t). L'ordine di vicinanza sarà dato, in ciascun caso, dal primo indice a che comparirà effettivamente in questa serie: vale a dire dal primo a tale che la $[p, p^a]$ non sia nulla. Come al n. precede si riconoscerà che quest'ordine è almeno uguale a $k+1$.

Ciò premesso, supponiamo che l'*ordine di vicinanza sia* $m+1$ (*almeno*), cioè che sian nulle, identicamente rispetto a t, tutte le $[p, p^a]$ con $a \leq m$. Dico che saran pure nulle tutte le $[p^b, p^c]$ con $b + c \leq m$. Invero da $[p, p^{a-1}] = 0$, derivando rispetto a t, e tenendo conto che $[p, p^a] = 0$, segue $[p', p^{a-1}] = 0$, per $a \leq m$. Quindi anche $[p', p^{a-2}] = 0$; sicchè, derivando e basandosi sulla precedente, si ha $[p'', p^{a-2}] = 0$. Così pure sarà $[p'', p^{a-3}] = 0$; e derivando, e valendosi dell'ultima, si trae: $[p''', p^{a-3}] = 0$. E così via.

Fissando ora che $m+1$ sia pari $= 2\mu$, avremo dunque:

$$[p, p^m] = 0\ ,\ [p', p^{m-1}] = 0\ ,\ [p'', p^{m-2}] = 0, \ldots, [p^{\mu-1}, p^\mu] = 0,$$

[1] Cfr. il principio della mia Memoria *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni* (Annali di Matem. (3) 27, 1918, pag. 75).

e derivando:

$$[p\,,p^{m+1}]+[p'\,,p^m]=0\ ,\ [p'\,,p^m]+[p''\,,p^{m-1}]=0\ ,\ [p''\,,p^{m-1}]+$$
$$+[p'''\,,p^{m-2}]=0\ ,\ \ldots\ [p^{\mu-1}\,,p^{\mu+1}]+[p^{\mu}\,,p^{\mu}]=0\,,$$

donde, essendo $[p^{\mu}\,,p^{\mu}]=0$, segue $[p\,,p^{m+1}]=0$; sicchè l'ordine effettivo di vicinanza risulta almeno $m+2$, e non $m+1$.

Concludiamo che: *in* S_{2k+1}, *quando* k *è pari, l'ordine infinitesimale di vicinanza di due* S_k *è sempre dispari.*

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota III del Corrispondente Francesco Severi.

6. Esposte nelle Note I, II [1] le necessarie premesse di carattere prettamente algebrico, e conservando le notazioni precedenti, poniamo

$$(17)\qquad u_i=\int\frac{\varphi_i(x\,,y\,,z)}{f'_z(x\,,y\,,z)}\,dx\qquad(i=1\,,2\,,\ldots\,,p)\,,$$

sicchè u_i è un integrale abeliano di 1ª specie sulla curva variabile $f(x\,,y\,,z)=0$, con y parametro. Supporremo, una volta per sempre, che gli assi coordinati sieno disposti genericamente, per guisa che nel fascio $y=$ cost. non vi sia che un numero finito di piani tangenti (ordinarî) alla superficie F. La curva segata su F, fuori della linea doppia, da $f'_z=0$ non ha allora nessuna parte situata in qualche piano $y=$ cost., e quindi u_i non diventa mai identicamente infinito, qualunque sia il piano $y=$ cost. che si considera. L'integrale u_i può però diventare di 3ª specie in corrispondenza ai *valori singolari* di y (valori di y che dànno i piani $y=$ cost. tangenti ad F). Se $y=b$ è uno di questi piani tangenti e ne è $(a\,,b\,,c)$ il punto di contatto, che designeremo brevemente con a, l'integrale u_i relativo alla curva $f(x\,,b\,,z)=0$, avrà generalmente due punti logaritmici sovrapposti, sui due rami di tale curva uscenti da a. Ma questi punti logaritmici possono anche mancare, cioè u_i può rimanere di 1ª specie anche per $y=b$. Questo accade allora e solo allora che la superficie $\varphi_i(x\,,y\,,z)=0$ passi per a.

Gli integrali u_i saranno linearmente indipendenti per ogni valore di y, che non sia critico pel sistema lineare L delle $\varphi_1\,,\varphi_2\,,\ldots\,,\varphi_p$: i valori critici di L continueranno a chiamarsi *critici* anche rispetto agl'integrali u_i. Tra

[1] Questi Rendiconti, pag. 163 e pag. 204.

questi valori critici deve comprendersi, come sappiamo, il valore $y = y_0$ se

$$\varphi_{q+1} = (y - y_0)\,\psi_{q+1}\,, \ldots, \varphi_p = (y - y_0)\,\psi_p\,,$$

le $\psi_{q+1} = 0\,, \ldots, \psi_p = 0$ essendo $p - q$ aggiunte indipendenti d'ordine $m - 3$; o il valore $y = \infty$, se si è preso addirittura

$$\varphi_{q+j} = \psi_{q+j} \qquad (j = 1\,, \ldots, p - q).$$

Qui è opportuno notare in modo esplicito un fatto, a prima giunta paradossale. Quando la superficie è regolare ($q = p_g - p_a = 0$) si possono prendere le $\varphi_1\,, \ldots, \varphi_p$ coincidenti colle $\psi_1\,, \ldots, \psi_p$, ed allora sembra che non vi sieno per gl'integrali u_i altri valori critici che quelli del sistema $\lambda_1\,\psi_1 + \cdots + \lambda_p\,\psi_p = 0$ e non il valore $y = \infty$. Cosicchè a prima vista si è tratti a concludere che per una superficie regolare di genere $p_g = 0$ gl'integrali u_i, scelti nel modo suddetto, non hanno alcun valore critico! E ciò contraddirebbe al modo come si costruiranno poi gl'integrali semplici di 1ª specie di F, a partire appunto da un sistema d'integrali privo di valori critici. Ma in realtà, anche nel caso in cui le $\varphi_1\,, \ldots, \varphi_p$, per essere la superficie regolare, possono identificarsi con altrettante superficie aggiunte d'ordine $m - 3$, $y = \infty$ continua ad esser critico per gl'integrali u_i, come quando, essendo $q > 0$, s'identificavano le $\varphi_{q+1}\,, \ldots, \varphi_p$ colle $\psi_{q+1}\,, \ldots, \psi_p$. Per convincersene si assoggetti lo spazio alla trasformazione omografica

$$x = \frac{x'}{y'}\,, \quad y = \frac{1}{y'}\,, \quad z = \frac{z'}{y'}\,, \tag{18}$$

che muta il fascio $y = \text{cost.}$ nel fascio $y' = \text{cost.}$ ed il piano $y = \infty$ nel piano $y' = 0$.

Designata con ψ una qualunque delle $\psi_{q+1}\,, \ldots, \psi_p$ ($q \geq 0$) e posto

$$f(x\,, y\,, z) \equiv g(x\,, y\,, z) + h(x\,, y\,, z) + \cdots$$
$$\psi(x\,, y\,, z) \equiv \eta(x\,, y\,, z) + \zeta(x\,, y\,, z) + \cdots,$$

ove $g\,, h\,, \ldots$ son costituiti da tutti i termini dei gradi rispettivi $m\,, m - 1\,, \ldots$ del polinomio f, e similmente $\eta\,, \zeta\,, \ldots$ son polinomi omogenei dei gradi rispettivi $m - 3\,, m - 4\,, \ldots$, si trova subito che l'integrale $u = \int \frac{\psi}{f_z}\,dx$ trasformasi, mediante la (18), nell'integrale di 1ª specie

$$u' = y' \int \frac{\eta(x'\,, 1\,, z') + y'\,\zeta(x'\,, 1\,, z') + \cdots}{g'_{z'}(x'\,, 1\,, z') + y'\,h_{z'}(x'\,, 1\,, z') + \cdots}\,dx'$$

relativo alla curva $g(x'\,, 1\,, z') + y'\,h(x'\,, 1\,, z') + \cdots = 0$. Sul piano $y' = 0$ si ha pertanto identicamente $u' = 0$. E ciò significa che gl'*integrali* $\int \frac{\psi_{q+j}}{f'_z}dx$, $(j = 1\,, \ldots, p - q)$, *ove* $\psi_{q+1} = 0\,, \ldots, \psi_p = 0$ *sieno aggiunte d'ordine* $m - 3$ *ad* F, *si annullano identicamente per* $y = \infty$.

Da ciò intanto segue che $y = \infty$ è critico anche per $q = 0$; e questo dirime l'accennato paradosso. Ponendo $\varphi_j = (y - y_0)\,\psi_j$, il valore $y = \infty$, nel caso $q = 0$, cessa di esser critico, ma si ha invece come valore critico $y = y_0$. In ogni caso si conclude che *fra i valori critici degli integrali* u_i $(i = 1, \dots, p)$ *ce n'è sempre uno* $(y = y_0$ o $y = \infty)$ *per cui gl'integrali* $u_{q+1}, \dots, u_p$ *si annullano identicamente.*

7. Fissato un valore iniziale generico $y = \gamma$, distinto dai valori singolari, sulla riemanniana $f(x, \gamma, z) = 0$, consideriamo un sistema di p retrosezioni $\overline{A}_j, \overline{B}_j$ $(j = 1, \dots, p)$. Variando y con continuità a partire da γ, quel sistema di retrosezioni si muta in un sistema di retrosezioni A_j, B_j per la curva variabile $f(x, y, z) = 0$; e finchè (sul piano ov'è distesa la variabile complessa y) si va da γ ad un altro valore non singolare γ', con un cammino ben determinato, nessuna ambiguità è possibile nella definizione delle retrosezioni limiti sulla curva $f(x, \gamma', z) = 0$, in quanto ogni punto di diramazione della riemanniana variabile tende ad una ben definita posizione limite. L'esame, fatto da Picard, circa il modo di comportarsi dei cicli della curva variabile $f(x, y, z) = 0$, nell'intorno di un valore singolare di y, permette di precisare agevolmente che cosa succede quando y circola attorno o addirittura va a coincidere con un valor singolare [1]. Ma per ora non ci occorre di specificar di più, bastandoci solo di avvertire che, se da γ si va ad un altro valore non singolare γ', gl'infiniti sistemi di retrosezioni che si ottengono sulla $f(x, \gamma', z) = 0$, in corrispondenza ai singoli cammini descritti da y, costituiscono tanti sistemi di $2p$ cicli primitivi di $f(x, \gamma', z) = 0$; e quindi che i cicli di uno qualunque di quei sistemi si esprimono come combinazioni lineari a coefficienti interi dei cicli di uno prefissato fra essi.

Premesso tutto ciò e supposto che il valore iniziale $y = \gamma$, oltrechè distinto dai valori singolari, lo sia anche dai valori critici degl'integrali u_i, indichiamo con $\overline{\omega}_{ij}, \overline{\omega}_{i,p+j}$ i periodi dell'integrale u_i, relativo alla curva $f(x, \gamma, z) = 0$, lungo i cicli $\overline{B}_j, \overline{A}_j$ percorsi nel verso positivo; e sieno $\omega_{ij}, \omega_{i,p+j}$ i periodi che derivano per continuità da quelli, quando y varia a partire da γ. Finchè y non va a coincidere con un valore singolare o critico, ha luogo la relazione riemanniana:

$$\sum_{i=1}^{p} (\omega_{ij}\,\omega_{k,p+j} - \omega_{kj}\,\omega_{i,p+j}) = 0 \qquad (i, k = 1, \dots, p)$$

[1] I punti attorno a cui si produce una sostituzione lineare a coefficienti interi sui cicli A_j, B_j sono soltanto i valori singolari (Picard). Veramente *a priori* potrebbe sembrare che analogo fatto si producesse in corrispondenza ai punti di contatto delle tangenti tripunte di F parallele all'asse z, in quanto anche in ciascuno di essi coincidono due punti di diramazione della superficie di Riemann variabile $f(x, y, z) = 0$. Ma un tal dubbio si rimuove subito, osservando che quei punti cessano d'essere di diramazione se, invece di x, si prende come variabile indipendente z.

e la diseguaglianza fondamentale

$$(19) \qquad \sum_{j=1}^{p} (\omega'_j \omega''_{p+j} - \omega''_j \omega'_{p+j}) > 0 ,$$

ove

$$\omega_j = \omega'_j + \omega''_j \sqrt{-1} \quad , \quad \omega_{p+j} = \omega'_{p+j} + \omega''_{p+j} \sqrt{-1}$$

sieno i periodi, lungo i cicli B_j, A_j, d'una qualsiasi combinazione lineare u, a coefficienti interi non tutti nulli, degl'integrali u_i. Tutto ciò perchè la curva variabile $f(x, y, z) = 0$ non s'abbassa di genere, le A_j, B_j non cessan di essere su essa retrosezioni e gl'integrali u_i non cessano d'esser su di essa linearmente indipendenti.

Immaginiamo ora il corpo Ω di funzioni abeliane relative alla tabella dei periodi ω_{ih} $(i = 1, \ldots, p\,;\ h = 1, \ldots, 2p)$, i quali son funzioni olomorfe di y nell'intorno di ogni valore non singolare. Per un teorema classico [1], queste funzioni abeliane si esprimono razionalmente mediante le funzioni Θ relative alla tabella

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & \varrho_{11} & \ldots \varrho_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \varrho_{p1} & \ldots \varrho_{pp} \end{array} \qquad (\varrho_{ik} = \varrho_{ki}) ,$$

ove le ϱ son definite dalle

$$(20) \qquad \omega_{i\,p+j} = \sum_{k=1}^{p} \omega_{ik} \varrho_{kj} \qquad (i, j = 1, \ldots, p) ,$$

e gli argomenti $w_1, \ldots, w_p$ delle Θ son legati agli argomenti $v_1, \ldots, v_p$ di quel corpo di funzioni abeliane, dalle relazioni

$$(21) \qquad v_i = \sum_{k=1}^{p} \omega_{ik} w_k \qquad (i = 1, \ldots, p) \text{ [2].}$$

La condizione di convergenza delle suddette serie Θ [che si può esprimere mediante la diseguaglianza (19)] [3], *resta sempre soddisfatta qualunque sia* y, *purchè diverso dai valori critici e singolari.* La forma delle relazioni (20), (21), che definiscono le ϱ, w, considerata insieme al fatto classico che il determinante delle ω_{ik} non è nullo pei valori considerati di y (perchè altrimenti gl'integrali u_i sarebbero dipendenti), ci assicura che le Θ, nel campo di variabilità considerato per y, restano sempre finite.

Consideriamo adesso le funzioni del corpo Ω quali funzioni sia degli argomenti $v_1, \ldots, v_p$, come di y (attraverso ai periodi ω). Nel parallelepi-

(1) Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, Teubner, 1903), pag. 127.
(2) Krazer, loc. cit., pag. 123.
(3) Krazer, loc. cit., pag. 124.

pedo dei periodi esse non hanno alcuna singolarità essenziale (Krazer, p. 115) come funzioni delle sole $v_1, \ldots, v_p$. È facile da ciò dedurre che le dette funzioni sono, anche rispetto ad y, nell'intorno di ogni valore ordinario $y = \gamma'$, o olomorfe o meromorfe. Infatti, se una Φ delle funzioni di Ω è, per $y = \gamma'$, funzione olomorfa di $v_1, \ldots, v_p$ nell'intorno di $v_1 = c_1, \ldots, v_p = c_p$ (ove $c_1, \ldots, c_p$ sieno valori finiti prefissati degli argomenti v), essa resta finita e uniforme, e perciò olomorfa, anche come funzione di y nell'intorno di γ'. Se invece per $y = \gamma'$ la suddetta Φ si esprime come quoziente $\frac{H}{K}$ di due funzioni H, K olomorfe nell'intorno di $(c_1, \ldots, c_p)$, ciascuna delle H, K sarà olomorfa anche come funzione di y nell'intorno di γ' e quindi Φ sarà funzione meromorfa di y. Pertanto:

Ogni funzione abeliana del corpo Ω è funzione olomorfa o meromorfa di y attorno ad ogni valore non singolare nè critico.

Astronomia. — *Sulla applicazione del calcolo vettoriale alla Astronomia.* Nota del Socio A. Abetti (1).

Il prof. A. Antoniazzi, direttore dell'Osservatorio di Padova, successore del compianto illustre maestro Lorenzoni, già a sua volta successore di quell'altra gloria nostra che fu il toscano Santini (2), ha resa pubblica una sua Memoria (3), che è un primo passo di applicazione del calcolo vettoriale all'Astronomia sferica; e ciò dopo che ne aveva esperimentati i vantaggi applicandolo, nelle sue lezioni, all'Astronomia teorica, cioè alle trattazioni relative alle orbite planetarie (4).

Nella suddetta Memoria di pagine 60, circa la metà sono impiegate ad esibire quelle nozioni di calcolo vettoriale, che occorsero per applicarlo alla correlazione fra i vettori e le coordinate cartesiane ed i circoli della sfera celeste, ed inoltre per la trasformazione di coordinate, per i problemi di moto diurno e siderale e per le orbite planetarie. È sembrato allo scrivente tale l'importanza della prefata Memoria da sentirsi spinto ad incoraggiarne, con parole proprie, lo studio ai giovani astronomi a cui oggi spetta

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1921.

(2) Di Caprese aretino n. 1787 m. 1877. Il suo testo del 1830, Padova, Tip. Seminario, tiene per noi Italiani altrettanto bene il luogo quanto il Chauvenet ed il Brünnow per gli Inglesi e Tedeschi.

(3) Antoniazzi A. M., *Di un rapido procedimento didattico per la trattazione dei principali problemi dell'Astronomia.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXXIX, Parte seconda (adunanza 8 luglio 1920).

(4) Un'applicazione simile venne a me sott'occhio colla quinta edizione degli *Elementi di Fisica* del collega prof. Róiti e nel vol. II: *Elettricità e Magnetismo*, alle prime pagine sono date le nozioni preliminari sui campi vettoriali.

raccogliere ed aumentare il nostro patrimonio scientifico. Con questo intendimento è sembrato utile fare il tentativo di produrre ed illustrare quanto più popolarmente sia possibile uno degli esempi di quella Memoria, mettendo in evidenza la celerità con cui il calcolo vettoriale riesce a stabilire formole già note ed in uso e state dedotte per vie diverse e principalmente colla trigonometria sferica.

*
* *

Certe grandezze astratte come le forze, la velocità e l'accelerazione, sono rappresentabili con segmenti di rette [1] a cui fu convenuto di assegnare una lunghezza, ragguagliata ad una unità di misura, e presa per un verso, positivo o negativo secondo che si considera il segmento da un estremo oppure dall'altro, ed ancora di esso è assegnata la direzione fondamentale scelta per riferimento. Tali grandezze si chiamano « vettori »[2] e costituiscono un algoritmo geometrico a cui sono applicabili le operazioni algebriche e del calcolo infinitesimale, e per la sua proprietà di prendere in conto la direzione, ossia la posizione nello spazio, risolve prontamente ed elegantemente i problemi che del medesimo fanno al caso nostro.

Un vettore individuato da un segmento OA si rappresenta colla notazione A — O in cui si deve intendere il senso preso da O verso A e si legge A meno O, e giova, a quella rappresentazione simbolica, un' unica lettera in grassetto così che con

$$A - O = \mathbf{a}$$

si deve per noi intendere il vettore **a** che fisso in O variando la sua direzione in ogni senso è capace per via del punto A di descrivere la superficie di una sfera.

I raggi visuali che dal nostro occhio, centro della sfera celeste, sono diretti alle stelle sono altrettanti vettori, e poichè per la risoluzione dei problemi della sfera fu ideata la Trigonometria sferica, nonchè assegnate le correlazioni con un sistema di assi ortogonali, oggi l'applicazione del calcolo vettoriale all'Astronomia, rivelato nella Memoria dell'Antoniazzi, è un primo passo di correlazione del nuovo metodo coi precedenti. Siccome i raggi vettori abbisognano di riferimento, il più logico di tutti sarà quello dei tre assi

[1] Sia che si tratti di grandezze ad una, a due od a tre dimensioni, cioè grandezze lineari, superficiali o cubiche. Quest'ultime contengono il concetto di spazio per tutti i punti del medesimo i quali costituiscono una triplice infinità che viene rappresentata con la terza potenza dell'infinito, cioè ∞^3.

[2] Il calcolo vettoriale ebbe i suoi precursori, o padri che si vogliano dire, e fra questi va notato il Bellavitis dell'Università di Padova che inventò nel 1832 il metodo delle « equipollenze » e lo espose nel Cap, III del suo trattato: *Elementi di geometria, trigonometria e geometria analitica.* Padova, Tip. del Seminario, 1862.

ortogonali che partono dal centro O della sfera e la incontrano ai vertici A′A″A‴, oppure ABC od altrimenti, del ben noto trirettangolo e determinano colla nuova veduta tre vettori fondamentali. I tre piani comprendenti a due a due i tre assi formano un triedro che ha il vertice in O e per base, sulla sfera, il trirettangolo che dunque ha i tre angoli retti, e tali sono anche i diedri, ed ha per lati i tre archi di cerchio massimo di 90° intersezioni della sfera celeste coi tre piani coordinati.

Intendiamo ora di vedere il trirettangolo della sfera disegnato sul piano della carta come nella fig. 1; i tre vettori fondamentali che partono dal centro O della sfera la incontreranno nei tre punti XYZ.

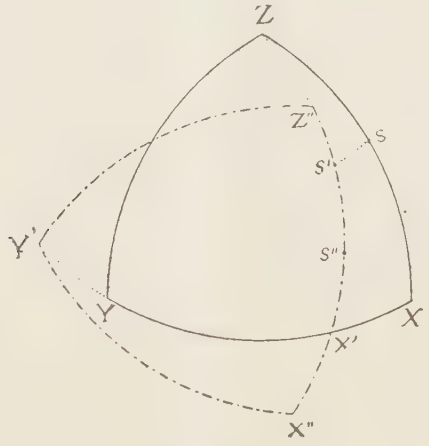

Fig. 1.

Supposto che sulla sfera il punto mobile S si stacchi dal piano fondamentale ZX verso di noi che guardiamo la figura, avremo, col soccorso dei vecchi precetti, che una qualunque sua nuova posizione (S) resta determinata da due coordinate sferiche, che sono l'angolo sferico in Z e la distanza polare Z(S). Ad ogni mutazione di posto della S corrisponde una variazione di queste coordinate e, nel tempo stesso, corrisponde una variazione del vettore S — O che passa in (S) — O. Ora questa variazione vettoriale può immaginarsi dipendente da una rotazione [1] suscettibile di essere riferita e decomposta, secondo i tre assi coordinati.

S'immagini ora il sistema dei quattro punti XYZS rigidamente congiunto, come si trattasse di una configurazione stellare, e ruoti esso da X verso Y intorno a Z. e di più pensiamo a volontà che Z rappresenti o il polo del mondo, o quello dell'eclittica, o l'altro dell'orizzonte, cioè il zenit.

[1] Su questo concetto della rotazione vedasi nelle Astr. Nachr. 5011, l'articolo: *Ein didaktisches Hilfsmittel zur sphärischen Astronomie*, von E. Anding.

In causa della rotazione intorno a Z questo punto resta immobile e gli altri tre punti prendono le posizioni segnate con un apice. Alla posizione S′ corrisponde una variazione dv dell'angolo al polo, che secondo i casi sarà, senza considerazione di segno, $d\alpha$, $d\lambda$ oppure dA. Una seconda rotazione intorno ad Y′ porterà S′ in S″ aumentando la distanza polare di S di una quantità dp corrispondente, in valore assoluto, ad una variazione $d\delta$, $d\beta$ oppure dh. Queste due rotazioni possiamo anche pensarle concomitanti alternate, od anche inverse, nel qual caso però occorrono le considerazioni di segno, perchè in realtà il punto S può passare in S″ in un numero infinito di modi.

Notiamo ora che una qualunque rotazione intorno ad S non sposta questo punto del pari come non si spostò Z nella prima rotazione nè Y′ nella seconda, e quest'avvertenza ci fa conoscere che se noi avremo bisogno di una rotazione arbitraria per concludere i valori delle variazioni delle due coordinate sferiche potremo applicarla insieme alle due già viste, immaginando che per tutte tre il punto si sia trasportato da S in S″. Nel caso in parola è la somma delle due rotazioni intorno a Z e ad Y′ che porta S in S″, ed in questa somma di due termini si può immaginare un terzo termine, corrispondente ad una rotazione intorno ad X. il quale venga annullato da una rotazione arbitraria. Il punto S sulla sfera celeste può, come si disse, passare in S″ in un numero infinito di modi; ma noi possiamo dire che supposto di conoscere la rotazione per cui il vettore S — O è diventato S″ — O possiamo scomporla in tre secondo gli assi e ve ne possiamo aggiungere anche un'altra intorno ad S capace di annullare quella su X; allora le altre due daranno le formole per le variazioni delle due coordinate sferiche.

***

Ora riporteremo l'esempio dato nella Memoria ai §§ 51, 52 relativo alle formole che esprimono la variazione annua in longitudine e latitudine delle stelle.

L'attrazione del Sole e della Luna sul rigonfiamento equatoriale dello sferoide terrestre combinata con la rotazione diurna produce un movimento del piano dell'equatore per cui la linea degli equinozî, ossia l'intersezione dei due piani, girá lentamente nel piano dell'eclittica in direzione opposta a quella in cui si contano le longitudini, che pertanto su di una eclittica fissa o media, corrispondente ad un'epoca t_0 come p. es. il principio dell'anno 1800, aumentano tutte della ben nota quantità chiamata la *precessione lunisolare.*

D'altra parte, le mutue attrazioni fra i pianeti e la Terra tendono continuamente a rimuovere questa dal suo piano, così che esso cambia di posizione senza influire su quella dell'equatore che in questo caso è riguardato come fisso o medio; ed è questa la *precessione planetaria* che modifica l'effetto della precedente e per cui si ha ciò che si chiama la *precessione*

generale. Per essa l'equinozio di primavera, origine delle longitudini e delle ascensioni rette, assume ad ogni istante una posizione celeste retrograda bene determinata.

Se ψ_1 è la precessione generale (1), l'equinozio nel tempo infinitesimo (2) dt retrograda con velocità (3) $\frac{d\psi_1}{dt}$ sull'eclittica del tempo t; e questa non è altro che una rotazione di senso retrogrado intorno al suo polo. D'altra parte l'eclittica ha un movimento di rotazione intorno alla linea che unisce

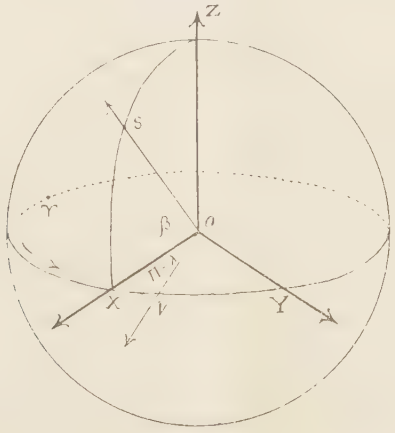

Fig. 2.

i due punti o nodi in cui si tagliano le due posizioni della medesima ai tempi t e $t + dt$. Ed è questa una variazione $\frac{d\pi}{dt}$ dell'inclinazione π dell'eclittica t rispetto alla media eclittica del tempo $1800 + t$ ossia una rotazione rappresentabile con un vettore diretto al nodo ascendente.

Nella fig. 2 è data disegnata prospetticamente la sfera celeste, intendendo che le longitudini siano contate dall'equinozio di primavera ♈ verso X e V nel senso della freccia. Si supponga che l'asse Z sia diretto al polo dell'eclittica, che VY sia il piano di questa al tempo t, che per il piano ZX resti determinato sulla sfera celeste il cerchio di latitudine della stella S di coordinate λ, β e finalmente che il segmento OV rappresenti il vettore $\frac{d\pi}{dt}$

(1) Cfr. Chauvenet, *A Manual of Spherical und Pratical Astronomy*, vol. I, *Precession*, §§ 364-370.

(2) Se si pensa che l'equinozio percorre in ciascun anno sull'eclittica un arco di 50″.2 e si fa il rapporto fra l'intera circonferenza di 360° e questo arco, si trova che occorrono circa 26000 anni affinchè l'equinozio percorra l'intera eclittica, supposto che conservi la velocità con cui si muove attualmente. Pertanto una unità di tempo dt di un anno o frazione del medesimo è da riguardarsi come un infinitesimo.

(3) Velocità che è la derivata dello spazio percorso rispetto al tempo.

la cui direzione è data dalla longitudine Π. Sarà allora l'angolo VOX la differenza fra le longitudini del vettore e della stella, cioè eguale a $\Pi - \lambda$.

Decomponiamo ora il vettore nelle due rotazioni complanari su X ed Y

$$\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda) \qquad \frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi - \lambda)$$

e ricordando che l'equinozio di primavera, da cui sono contate le longitudini di V e di S, è retrogradato per una rotazione $-\frac{d\psi_1}{dt}$ intorno a Z, diremo che lo spostamento totale del vettore S — O ha, rispetto ai tre vettori fondamentali, le tre componenti che seguono,

X	Y	Z
$\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda)$	$\frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi - \lambda)$	$-\frac{d\psi_1}{dt}$

Aggiungiamo ora una rotazione arbitraria intorno alla direzione della stella S; indicando con c una costante arbitraria potremo rappresentare quella rotazione con le tre componenti proiettate sui tre assi, e cioè con

$$c\cos\beta \quad | \quad 0 \quad | \quad c\operatorname{sen}\beta .$$

In base alle due formole vettoriali stabilite dal prof. Antoniazzi al § 29 della sua Memoria, deve la costante arbitraria c esser tale da annullare la rotazione intorno ad X, quindi deve essere

$$c\cos\beta = -\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda)$$

da cui

$$c = -\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda)\frac{1}{\cos\beta} .$$

Ed ora, conforme al precetto delle stesse formole, facciamo la somma delle tre colonne ed avremo il nuovo prospetto

per X	0
» Y	$\frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi - \lambda)$
» Z	$-\frac{d\psi_1}{dt} - \frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda)\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$

Riferendoci alla fig. 1 vediamo che la prima rotazione che si fa intorno a Z esprime la variazione della longitudine e quella intorno ad Y la variazione in distanza polare, che qui per noi è il complemento della latitudine. D'altra parte la prima rotazione fa retrogradare l'equinozio, cioè l'ori-

gine delle longitudini, per cui queste aumentano, così che l'espressione del $\frac{d\lambda}{dt}$ sarà quella per Z mutata di segno, quindi

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\pi}{dt} \cos(\Pi - \lambda) \operatorname{tg} \beta .$$

L'espressione di latitudine, complemento della distanza polare, avrà l'espressione trovata per Y pure mutata di segno, cioè sarà:

$$\frac{d\beta}{dt} = - \frac{d\pi}{dt} \operatorname{sen}(\Pi - \lambda) .$$

Le due formole corrispondono pienamente a quelle del Chauvenet al problema del § 370 della determinazione della precessione annua in longitudine (1) e là si trovano indicate col numero (655), ben inteso che in esse i nostri $\frac{d\psi_1}{dt}$ e $\frac{d\pi}{dt}$ sono i coefficienti numerici calcolati dallo Chauvenet per l'epoca $1800 + t$.

Chimica. — *A proposito di un lavoro del prof. E. Salkowski sopra le melanine.* Nota del Socio Angelo Angeli e di Antonio Pieroni (2).

Lo scorso anno (3) il prof. E. Salkowski ha pubblicato un lavoro sopra le melanine ricavate da alcuni tumori umani, nel quale dopo di avere esposto un metodo che permette di isolare questi interessanti pigmenti senza correre pericolo di alterarli in seguito a trattamenti con reattivi troppo energici, quale p. es. l'acido cloridrico concentrato consigliato da altri autori, descrive le proprietà dei prodotti così ottenuti e varie reazioni eseguite con lo scopo di trovare qualche fatto che permetta di formarsi un criterio almeno approssimato sopra la natura chimica di queste sostanze.

Siccome si tratta di un argomento del quale noi pure in questi ultimi anni, sebbene da un altro punto di vista, ci siamo occupati, così abbiamo reputato opportuno di sottoporre ad un attento esame i fatti importanti stabiliti dal Salkowski e soprattutto le conseguenze che egli ne ricava, ed a questo proposito dobbiamo subito dire che noi non condividiamo in tutto il suo modo di vedere.

(1) *To find the annual precession in longitude for a given date*, vol. I, ediz. 2ª, pag. 610, § 370.

(2) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

(3) Virchow's, Archiv. Band *227*, II (1920), pag. 121.

Uno dei fatti sperimentali più importanti descritti dall'A. è senza dubbio quello di avere trovato che *la melanina per fusione con eccesso di potassa fornisce pirrolo*; esso è in stretta relazione con le analogie, da noi ripetutamente poste in rilievo, che le melanine naturali presentano con i varî neri di pirrolo che noi abbiamo preparati sia ossidando il pirrolo coi soliti reattivi, come pure trattando il pirrolo stesso con i chinoni.

A questo fatto però l'A. fa seguire le parole che riportiamo integralmente:

« L'aver trovato pirrolo nella massa fusa non permette di trarre la « conclusione che la melanina contenga un complesso atomico della serie etero- « ciclica, p. es. acido pirrolidincarbonico, perchè il pirrolo viene fornito anche « dall'acido succinico, cioè da un composto della serie alifatica, per mezzo « di una cosiddetta reazione pirogenica (si deve essere molto cauti nel rica- « vare conseguenze dalle reazioni pirogeniche); piuttosto si può dedurre che « nella melanina è contenuto il complesso atomico dell'acido amminosucci- « nico. Io non vorrei essere frainteso; non è escluso che il pirrolo possa « provenire da acido α-pirrolidincarbonico preformato nella melanina, ma ciò « non è dimostrato ».

Questo curioso modo di ragionare è senza dubbio dovuto al fatto che l'A. considera in blocco come « pirogeniche » tutte le reazioni effettuate per mezzo del calore e fa quindi una confusione poco opportuna perchè non pensa che reattivi differenti aggiunti ad una stessa sostanza possono condurre a prodotti finali di natura completamente diversa.

Secondo quanto egli asserisce dall'acido succinico, per reazione pirogenica, si può avere pirrolo; ma in realtà quando egli vuole prepararsi una piccola quantità di pirrolo necessaria per le sue esperienze di confronto l'A. riscalda succinato ammonico con polvere di zinco; era ben prevedibile, ed anzi era già noto, che in questo modo doveva formarsi pirrolo.

Bisogna tenere ben presente che nel riscaldamento con polvere di zinco si compiono in prevalenza *processi di riduzione*; nelle fusioni con potassa invece, come è il caso del trattamento da lui fatto alla melanina, avvengono invece, come tutti sanno, *processi di ossidazione e di idrolisi* e quindi di demolizione delle molecole; quando invece si sottopongono a riscaldamento da sole sostanze che non volatilizzano senza alterarsi, possono compiersi i più svariati processi di sintesi e di demolizione ad un tempo.

Sarebbe ozioso il riferire qui esempî che tutti conoscono o che per il caso particolare poco interessano, e quindi ci limiteremo ad accennare ad alcuni casi presi in considerazione da un altro cultore della chimica biologica, Neuberg [1], allo scopo principalmente di mettere in guardia contro la

[1] Beiträge zur wissenschaf. Medizin und Chemie. Festschrift für E Salkowski. Berlin, 1904; cfr. anche K. Spiro, Zeit. für analyt. Chemie, *44* (1905), pag. 134.

colorazione rossa che può assumere un fuscello di abete bagnato con acido cloridrico, colorazione che, come è noto, viene data come caratteristica per i derivati del pirrolo e dell'indolo.

Il Neuberg trova p. es. che, oltre ai pirroli ed indoli, forniscono positiva questa reazione gli amminoacidi ed anche la taurina stessa quando vengano riscaldati da soli e meglio ancora in presenza di polvere di zinco ed ammoniaca; operando in questo ultimo modo la reazione viene presentata anche dagli acidi tartrico, levulinico, citraconico, dalla glucosammina ecc., vale a dire da tutta una serie di sostanze che non hanno nulla a che fare con i pirroli, e perciò egli pure consiglia di stare guardinghi sopra i risultati di questa reazione.

Per questo motivo abbiamo giudicato opportuno di eseguire noi pure alcune esperienze in proposito ed abbiamo osservato quanto segue.

La *glicocolla*, *leucina* e *tirosina* riscaldate da sole in tubo da saggio si decompongono trasformandosi in masse brune infusibili le quali soltanto, per ulteriore azione del calore, sviluppano vapori che arrossano la scheggia di abete; le stesse sostanze invece, fuse con potassa, come fa Salkowski per la sua melanina, dànno reazione completamente negativa.

Le sostanze che volatilizzano inalterate, come il *pirrolidone* e la *succinimmide* forniscono reazione negativa tanto da sole quanto fuse con potassa; la reazione riesce positiva solamente se i composti si riscaldano con polvere di zinco.

Come era ben prevedibile dunque, la reazione riesce positiva oppure negativa a seconda del modo con cui vengono effettuate queste reazioni che sono tutte « pirogeniche ».

Le sostanze proteiche che come è stato dimostrato contengono sicuramente residui dell'acido α-pirrolidincarbonico [1], assieme ad altri residui che ancora non tutti sono stati identificati, quali la *caseina* (noi abbiamo impiegato un preparato secondo Hammarsten, proveniente da Kahlbaum), e la *gelatina* forniscono entrambe positiva ed intensa la reazione tanto da sole quanto fuse con potassa [2].

Trovammo ancora che l'*ippomelanina*, il *nero di sepia*, il *nero di coroide* ed i *neri di pirrolo* dànno del pari reazione intensissima sia riscaldati da soli sia anche per fusione con potassa.

[1] Anche l'acido α-pirrolidincarbonico (prolina) e l'ossiprolina (e perciò anche l'acido α-carbopirrolico) si possono considerare come amminoacidi analoghi agli ordinarî peptidi, sebbene in questo caso il residuo ammidato concorra alla formazione di un anello chiuso: è quindi da aspettarsi che più molecole di queste sostanze possano congiungersi fra di loro per dare prodotti analoghi ai polipeptidi; ciò si verifica forse, almeno in parte, nella caseina, gelatina ecc.

[2] Come è noto, nella caseina sono contenuti anche residui indolici (triptofano) che finora non vennero riscontrati nella gelatina; la gelatina invece, per riscaldamento, fornisce notevoli quantità dell'anidride dell'acido α-carbopirrolico (pirocolla).

Si vede che questi risultati non sono in buon accordo con quanto riferiscono i due citati autori e veramente non si comprende come Salkowski asserisca che dalla formazione di pirrolo, da lui osservata, per fusione con potassa della melanina, si possa tutto al più dedurre che nella molecola di questa sostanza sia contenuto il complesso atomico dell'acido amminosuccinico; come mai il Salkowski concilia questa sua supposizione col fatto da noi prima riferito che l'α-pirrolidone, per fusione con potassa, non fornisce pirrolo?

Il Salkowski ha pure sottoposto la sua melanina all'ossidazione con permanganato; a tale scopo egli tratta la sostanza con eccesso di soluzione di permanganato bollente, in presenza di alcali ed alla fine elimina l'ossidante inalterato per mezzo dell'alcool. Trova che la melanina a questo modo viene completamente distrutta.

Che sottoponendo ad un processo di ossidazione così energico un composto che senza dubbio contiene numerosi doppî legami come una melanina, avvenga una profonda demolizione della molecola, era facilmente prevedibile; ma noi siamo pervenuti a risultati alquanto diversi effettuando l'ossidazione a freddo e con quantità limitate di permanganato.

Ippomelanina oppure nero di sepia vennero trattate a freddo con soluzione di permanganato al 2 %, in presenza di qualche goccia di potassa; in principio il reattivo viene prontamente ridotto e si interrompe l'aggiunta dell'ossidante quando il colore violetto persiste qualche minuto; abbiamo osservato che ogni grammo di melanina richiede intorno a 100 c.c. di soluzione di permanganato. Si separa il biossido di manganese e passa un liquido limpido, giallognolo che viene evaporato a b. m. Rimane un residuo cristallino che contiene molto ossalato di potassio; riscaldandone una piccola quantità in tubo da saggio sviluppa vapori che colorano in rosso intensissimo la scheggia di legno bagnata con acido cloridrico; inoltre trattato con soluzione diluitissima di un sale di diazonio, o meglio ancora con una traccia di fenilazossicarbonammide $C_6H_5 . NO : N . CO . NH_2$, si ottiene un liquido intensamente colorato in rosso aranciato, precisamente come noi abbiamo osservato nel caso degli acidi pirrolcarbonici.

Acidificando con cautela la soluzione del sale primitivo con acido solforico diluito ed estraendo il liquido, lievemente colorato in roseo, con etere, assieme ad acido ossalico si ottiene un prodotto quasi incoloro che intorno a 200° fonde in modo non netto con sviluppo gassoso e manda vapori che arrossano del pari fortemente la scheggia di abete.

La scarsa quantità di melanine che avevamo a nostra disposizione ed i bassi rendimenti in prodotto di ossidazione non ci hanno ancora permesso di sottoporlo a più minuto esame, ma le reazioni descritte rendono sommamente probabile che si tratti di qualche acido della serie del pirrolo ovvero dell'indolo. Come ognuno comprende, anche in questo caso sarebbe invero-

simile ammettere che le reazioni dei pirroli siano dovute alla presenza di derivati ammidati dell'acido succinico ed analoghi contenuti nella molecola della melanina di partenza.

Aggiungeremo inoltre che ippomelanina e nero di sepia vengono ossidate facilmente a caldo anche da acqua ossigenata al 30 % (Peridrol Merck) diluita con acido acetico. Rimane indisciolto un piccolo residuo, e la soluzione giallognola evaporata lascia uno sciroppo che, per riscaldamento, sia da solo sia in presenza di potassa, fornisce del pari la reazione al fuscello di abete in modo intenso.

Il Salkowski ha trovato infine che bollendo la melanina con acido nitrico ed evaporando successivamente l'acido rimane un residuo giallo scuro che con potassa si colora fortemente in rosso bruno. Secondo l'A. questo comportamento più che alla presenza di residui fenolici nella melanina si potrebbe attribuire al triptofano, che fornisce del pari la medesima reazione. A questo proposito noi abbiamo osservato che anche i neri di pirrolo si comportano in modo analogo; ma in questo caso difficilmente si può attribuire la reazione al triptofano. Essa sarà dovuta a derivati del pirrolo o tutto al più, data la proprietà che ha il pirrolo, almeno in casi particolari, di trasformarsi in indolo, potrebbe spettare a quest'ultima sostanza ovvero ad un prodotto affine.

Senza tenere conto delle impurezze che possono essere trattenute fisicamente dalle melanine, dato il loro stato colloidale, è molto verosimile, come ancora molti anni or sono avevano supposto Nencki e Berdez, che in queste sostanze, oltre ai gruppi cromogeni caratteristici, sieno contenuti anche residui organici ciclici ed alifatici (e talora anche zolfo e ferro che possono però venire eliminati senza alterare sensibilmente il loro colore) ed è da aspettarsi che tali residui possano variare a seconda del tessuto da cui le stesse melanine provengono.

Il fatto però trovato da Salkowski che le melanine per fusione con potassa forniscono pirrolo, le analogie che si riscontrano fra melanine e neri di pirrolo, la proprietà che ha il pirrolo di fornire prodotti colorati in nero ed in bruno non solo per mezzo degli ordinari ossidanti, ma anche per mezzo delle ossidasi tanto in vitro quanto nei tessuti viventi [1], il fatto posto in rilievo da Saccardi [2] che le iniezioni di pirrolo determinano negli animali una melanuria i cui caratteri sono simili a quella che Eppinger ha studiata in ammalati da melanosarcoma, ovvero in seguito ad iniezione di melanina da tumore melanotico, a nostro avviso, rendono sempre più probabile che il colore di tutti questi prodotti sia in gran parte dovuto ad una stessa sostanza fondamentale: il pirrolo.

(1) P. Rondoni, Lo Sperimentale, annata *74* (1920), fascicolo IV-VI, pag. 155.
(2) P. Saccardi, Gazzetta chimica, *50*, parte II (1920), pag. 118.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sui moti limiti di un sistema semirigido ruotante attorno ad un punto fisso e sottratto all'azione di forze esterne.* Nota di O. Lazzarino, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo (1).

In una Nota precedente (2), alla quale mi riferisco per la parte bibliografica, ho esteso al caso generale di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi *compressibili* e ruotante attorno ad un punto fisso una notevole formola di Joukowski che dà la variazione nell'unità di tempo dell'energia cinetica del sistema.

Indicando con T questa energia, con P′ e P'_r rispettivamente i vettori della velocità assoluta e relativa di un qualunque punto P delle masse fluide e con μ i coefficienti di viscosità dei liquidi, ho dimostrato che sussiste la formola

$$(I) \qquad \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_1^h \int_\sigma a \times P'_r \cdot d\sigma - \sum_1^h \int_\tau \mu I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) d\tau$$

dove gl'integrali s'intendono estesi rispettivamente alle superficie σ e agli spazi τ delle h cavità del sistema, e con a è designato il vettore della forza di attrito fra solido e liquidi.

Ora, supponendo che col variare del tempo i termini del 2° membro della (I) si annullino, si ha un particolare moto del sistema che può chiamarsi « *moto limite* » il cui studio, per via intrinseca, è oggetto della presente Nota.

1. Moto limite e sue principali proprietà. — Osservando che il coefficiente μ di viscosità è un numero positivo e che per i liquidi viscosi il vettore a della forza di attrito non è nullo nè perpendicolare al vettore P'_r, dalla (I) risulta chiaro che per l'annullarsi del 2° membro è necessario e basta che siano soddisfatte le condizioni

$$(1) \qquad P'_r = 0 \quad , \quad I_1\left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) = 0 .$$

Ora, per formole note (3), la seconda delle (1) può anche scriversi

$$I_1\left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) = I_1 \frac{dP'}{dP} \cdot I_1 \frac{dP'_r}{dP} + I_2 \frac{dP'}{dP} + I_2 \frac{dP'_r}{dP} - I_2\left(\frac{dP'}{dP} + \frac{dP'_r}{dP}\right)$$

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

(2) O. Lazzarino, *Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semirigido ruotante attorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne* [questi Rendiconti, ser. 5ª, vol. XXX, 1° sem., fasc. 4°, pag. 113].

(3) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* (a. 1912, tom. I, pag. 34 [7] e pag. 44 [2]). Questo testo sarà indicato in seguito con la sigla AVG.

e da qui si vede che la 2ª delle (1) è conseguenza della 1ª, onde si può dire che il moto limite del sistema è caratterizzato dalla sola condizione $P'_r = 0$ la quale importa come soluzione unica

$$P' = \Omega \wedge (P - O) \tag{2}$$

cioè « *il moto limite del sistema è caratterizzato dal fatto che le masse fluide si comportano come se formassero un tutto rigido con la parte solida* ».

Si possono dimostrare alcune notevoli proprietà di questo moto.

Sostituendo l'espressione (2) di P' nella (VI') della Nota precedente [loc. cit. (1)], si ha

$$[\Omega \wedge (P - O)]' = \operatorname{grad}_P (\Pi - U) + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \operatorname{grad} \operatorname{div} [\Omega \wedge (P - O)] + \nu \Delta' [\Omega \wedge (P - O)]. \tag{3}$$

Ora, il 1° membro della (3) porge

$$[\Omega \wedge (P - O)]' = \Omega' \wedge (P - O) + \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 \cdot (P - O);$$

quanto al 2° membro si osserva che i due ultimi termini sono nulli: infatti, essendo $\operatorname{rot}_P (P - O) = 0$, $\Delta' (P - O) = 0$ ed Ω indipendente da P, per formole note si ha

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} [\Omega \wedge (P - O)] = \operatorname{grad} [\operatorname{rot}_P \Omega \times (P - O) - \operatorname{rot}_P (P - O) \times \Omega] = 0$$

$$\Delta' [\Omega \wedge (P - O)] =$$

$$= \Omega \wedge \Delta' (P - O) - (P - O) \wedge \Delta' \Omega + 4V \left(\frac{d(P - O)}{dP} \cdot K \frac{d\Omega}{dP} \right) = 0.$$

Quindi la (3) può scriversi

$$\Omega' \wedge (P - O) + \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 (P - O) = \operatorname{grad}_P (\Pi - U). \tag{4}$$

Osservando ora che il 2° membro della (4) è funzione dei punti P ma non del tempo, si ha $\Omega' = 0$ e quindi, se Ω_0 è un vettore *costante*, può scriversi

$$\Omega = \Omega_0 \tag{5}$$

e perciò si conclude che « *nelle ipotesi fatte, il moto limite del sistema è una rotazione uniforme attorno ad un asse fisso nello spazio* ».

Inoltre, poichè per $P'_r = 0$ risulta $M'_r = 0$, dalla (I) della Nota citata e dalla (5) si ha

$$\Omega_0 \wedge (\alpha \Omega_0 + M) = 0 \tag{6}$$

e, ponendo $\alpha \Omega_0 + M = \alpha_1 \Omega_0$, dove α_1 è l'omografia d'inerzia rispetto al punto fisso O di tutto il sistema, si può anche scrivere

$$\Omega_0 \wedge \alpha_1 \Omega_0 = 0 \tag{7}$$

cioè « *nel moto limite, l'asse costante di rotazione* $O\Omega_0$ *risulta parallelo ad una delle direzioni unite dell'omografia d'inerzia, relativa al punto fisso, del sistema totale costituito dalla parte rigida e dalla parte fluida considerata come formante un sistema rigido* ».

2. Casi possibili di moti limiti. — Supponendo che l'omografia α_1 d'inerzia sia arbitraria, si possono presentare diversi casi nei quali la (7) può essere soddisfatta.

a) Se α_1 è tale che l'ellissoide d'inerzia, di centro O, relativo al sistema totale risulti un ellissoide a *tre assi diseguali*, per soddisfare alla (7) è necessario che l'asse costante $O\Omega_0$ di rotazione coincida con uno degli assi principali del detto ellissoide. Perciò si conclude che « *il moto limite del sistema sarà, in questo caso, una rotazione permanente attorno ad uno dei tre assi principali dell'ellissoide d'inerzia di tutto il sistema rispetto al punto fisso* ».

b) Se poi α_1 è tale che l'ellissoide d'inerzia risulti di rivoluzione attorno ad un asse, allora « *nel moto limite, l'asse permanente di rotazione del sistema può coincidere col detto asse o con una qualunque delle rette del fascio di centro* O *avente per sostegno il piano principale di inerzia normale all'asse di rivoluzione dell'ellissoide* ».

c) Se, infine, α_1 è un numero, l'ellissoide d'inerzia si riduce ad una sfera di centro O e allora « *nel moto limite, l'asse permanente di rotazione può coincidere con uno qualunque dei raggi della stella di centro* O ».

In tutti questi casi la grandezza della velocità di rotazione è arbitraria ma costante e l'asse di rotazione si mantiene fisso per tutta la durata del moto. Tenendo conto della natura del sistema qui considerato, risulta evidente che i detti moti comprendono come casi particolari i noti moti di Dirichlet relativi ad un solido avente una sola cavità di forma ellissoidale o sferica riempita da liquido perfetto.

3. Condizioni per la permanenza dei moti delle masse fluide viscose. — Supposti permanenti i moti delle masse fluide, si ha *mod* $P' = cost$ in tutti i punti P dello spazio da esse occupato e risulta quindi $P'' = 0$. Allora dalla (IV) della Nota citata si ricava, per un punto qualunque P del contorno, $\Omega' \wedge (P - O) \times \mathbf{n} = 0$ e da qui segue $\Omega' = 0$, $\Omega = \text{cost}$, cioè « *la rotazione del sistema deve essere permanente* ». Allora l'energia cinetica risulta costante e dalla (I) si ha la relazione

$$\frac{1}{2}\sum_1^h \int_\sigma a \times P'_r \cdot d\sigma + \sum_1^h \int_\tau \mu I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP} \right) d\tau = 0$$

che, come si è dimostrato precedentemente, ammette come *soluzione unica*

$$P' = \Omega \wedge (P - O). \tag{8}$$

Ripetendo il ragionamento in senso inverso, si vede facilmente che la (8),

oltre ad essere *necessaria*, è anche *sufficiente* per la permanenza dei moti delle masse fluide. Si può quindi concludere che « *il solo caso possibile di moti permanenti delle masse fluide viscose è caratterizzato dalla* (8) *e corrisponde al fatto fisico che, per effetto della viscosità, il fluido debba aderire così perfettamente alle pareti della rispettiva cavità che risulti* $P'_r = 0$. *Allora il sistema ruota con moto uniforme attorno ad un asse fisso come se fosse completamente rigido* ».

Tenendo anche presente quanto è stato dimostrato nel § 1, si può ancora dire che « *l'unico caso possibile di moti permanenti delle masse fluide è un moto limite del sistema* ».

Idrodinamica. — *Circuitazione superficiale.* III: *Il teorema della forza sostentatrice nel caso di una corrente fluida spaziale.* Nota di Mario Pascal, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo (1).

Il teorema di Joukowski o della *forza sostentatrice* dà, come è noto (2), l'espressione di una delle componenti della resistenza totale incontrata da un contorno di ostacolo opposto ad una corrente fluida piana parallela, mediante il prodotto della densità del fluido, della velocità limite della corrente e della circuitazione delle velocità lungo una linea chiusa circondante l'ostacolo, circuitazione che, nel caso che le velocità dipendano da un potenziale, è uguale a quella calcolata lungo il contorno stesso dell'ostacolo.

Con la scorta del nuovo concetto di *circuitazione superficiale* che abbiamo introdotto e dei risultati che abbiamo raggiunto nelle Note precedenti (3), ci è possibile ora dimostrare il seguente teorema che può considerarsi come l'estensione del teorema di Joukowski al caso di una corrente fluida spaziale.

Se una corrente fluida spaziale di velocità limite V_0, *diretta nel senso negativo dell'asse* x, *investe un ostacolo, la risultante delle pressioni del fluido sulla superficie dell'ostacolo giace nel piano* yz. *Il valore delle sue componenti secondo gli assi* y *e* z *è rispettivamente uguale al prodotto della densità del fluido e della velocità limite della corrente per le componenti secondo gli assi suddetti del vettore della circuitazione superficiale, calcolata lungo la superficie dell'ostacolo.*

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

(2) N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki], Paris, Gauthier Villars, 1916; H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1916, pag. 666. Ved. inoltre: P. Burgatti, *Sopra un teorema di Joukowski relativo alla forza sostentatrice nei corpi in moto traslatorio uniforme entro un fluido.* Rend. R. Acc. di Bologna, 1917-18.

(3) M. Pascal, *Circuitazione superficiale.* I: *Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.* Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1920, 2° sem., pag. 353; II: *Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione* Questi Rendiconti, vol. XXX, 1921, 1° sem., pag. 117.

Dimostreremo tale teorema basandoci — come fa il Joukowski — sul teorema di Eulero, esprimendo cioè che tutte le forze che agiscono sopra una massa fluida in movimento sono equilibrate dalle forze dovute alle quantità di moto.

Sia H un corpo che formi ostacolo ad una corrente non vorticosa, di velocità limite V_0, diretta nel senso negativo dell'asse x; il potenziale di velocità sia

$$\varphi = -V_0 x + f(x, y, z)$$

in cui f è una funzione tale che le sue derivate sono nulle a distanza infinita.

Circondato l'ostacolo con una qualsiasi superficie chiusa, ad esempio una sfera σ, per il teorema di Eulero, applicato alla massa fluida compresa fra la superficie dell'ostacolo e quella della sfera σ, la somma delle pressioni $-X$, $-Y$, $-Z$ esercitate da H sul fluido; delle pressioni idrodinamiche p; e delle forze dovute alle quantità di moto, deve essere nulla.

Le componenti della velocità sono

$$u = -V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \; ; \; v = \frac{\partial f}{\partial y} \; ; \; w = \frac{\partial f}{\partial z} \, ,$$

e quindi, se α, β, γ sono gli angoli che la normale interna a σ forma con gli assi, e ϱ è la densità del fluido, la massa di fluido che nell'unità di tempo entra attraverso l'elemento $d\sigma$ è

$$\varrho \left[\left(-V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \, ;$$

una formola nota ci dà poi

$$p = \text{cost.} - \frac{\varrho}{2} \left[\left(-V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Si ha così

$$(1) \quad \begin{cases} X = \int_\sigma p \cos\alpha \, d\sigma + \\ \quad + \varrho \int_\sigma \left(-V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left[\left(-V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \\ Y = \int_\sigma p \cos\beta \, d\sigma + \\ \quad + \varrho \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial y} \left[\left(-V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \\ Z = \int_\sigma p \cos\gamma \, d\sigma + \\ \quad + \varrho \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial z} \left[\left(-V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \, . \end{cases}$$

Eseguendo le sostituzioni e gli sviluppi indicati, e trascurando i termini cha risultano essere infinitesimi di ordine superiore, oppure del tipo $\{\text{cost.} \cos\alpha\, d\sigma\}$, si ottiene facilmente

$$X = \varrho V_0 \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha\, d\sigma - \varrho V_0 \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha\, d\sigma -$$

$$- \varrho V_0 \int_\sigma \left[\left\{ -V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma = 0$$

poichè l'ultimo integrale, non essendo altro che la quantità totale di fluido entrato nella sfera σ, è nullo.

Le altre due componenti diventano invece

$$(2) \qquad \begin{cases} Y = \varrho V_0 \int_\sigma \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \cos\beta - \frac{\partial f}{\partial y} \cos\alpha \right\} d\sigma \\ Z = -\varrho V_0 \int_\sigma \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \cos\alpha - \frac{\partial f}{\partial x} \cos\gamma \right\} d\sigma . \end{cases}$$

Gli integrali che figurano nelle precedenti espressioni sono rispettivamente le componenti secondo gli assi z e y del vettore della circuitazione superficiale dovuta alla parte di velocità che dipende dalla funzione f, e calcolata lungo la superficie σ.

Ma siccome il moto è stato supposto a potenziale, per un teorema dimostrato nella Nota precedente, e chiamando con I^{xy}, I^{zx} le componenti secondo z e y della circuitazione superficiale calcolata lungo la superficie dell'ostacolo H, le (2) possono scriversi:

$$(3) \qquad \begin{cases} Y = \varrho V_0 I^{xy} \\ Z = -\varrho V_0 I^{zx} . \end{cases}$$

La risultante di queste due forze giace evidentemente nel piano yz, e potrebbe anche essere facilmente costruita. Tale risultante è quella che, nel caso che ci occupa, può assumere il nome di *forza sostentatrice*.

Matematica. — *Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che son luoghi di almeno* ∞^2 *rette.* Nota I di Eugenio G. Togliatti, presentata dal Socio C. Segre (*).

1. La dimensione dello spazio normale d'una V_3^4 irriducibile è ≤ 6 (1); ed è noto che una V_3^4 di S_6, che non sia un cono proiettante da un punto una superficie di Veronese, contiene una serie razionale ∞^1 di piani (2); escluso che V_3^4 sia un cono, quegli ∞^1 piani uniscono terne di punti omologhi di due rette a, b e d'una conica c, riferite proiettivamente (3).

Tale V_3^4 contiene ∞^3 rette. Viceversa, se per un punto generico P di una V_3^4 irriducibile, che non sia un cono, passano infinite rette della V_3^4 (4), questa contiene ∞^1 piani (5), costituenti una serie razionale (perchè un iperpiano generico contenente uno di essi sega ancora V_3^4 in una F^3 rigata non cono), dimodochè la V_3^4 coincide con la precedente o con una sua proiezione (3).

La proiezione W_3^4 della V_3^4 di S_6 anzidetta da una retta generica r dell'S_6 sopra un S_4 σ, ha come superficie doppia una rigata cubica normale F (6): infatti, un S_4 proiettante generico sega V_3^4 in una C^4 razionale normale che ha tre corde incidenti ad r. Si vede poi subito che l'S_5 proiettante $r\,a\,b$ contiene due piani μ, ν di V_3^4, e perciò contiene un S_3 proiettante (intersezione degli S_4: $r\,\mu$, $r\,\nu$) che sega μ, ν in due rette m, n, e la cui traccia d su σ è quindi una retta doppia di W_3^4, anzi proprio la direttrice rettilinea di F, perchè le ∞^1 coniche di V_3^4 passanti per le sin-

(*) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(1) V. ad es. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî*, Pisa (1907), Cap. 9°, n. 6.

(2) V. ad es. Bertini, loc. cit., Cap. 14°, n. 10.

(3) Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, Atti Acc. Torino, 21 (1885-1886), pp. 95-115. Questa stessa V_3^4 trovasi in: G. C. Young, *Sulla varietà razionale normale* M_3^4 *di* S_6 *rappresentante della trigonometria sferica*, id., 34 (1898-1899), pp. 587-596.

(4) Anzi ∞^1, se no la V_3^4 conterrebbe l'S_3 che la tocca in P.

(5) Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti*, Rendiconti Palermo, 15 (1901), pp. 33-51, n. 10.

(6) Aprile, *Sulla varietà, dell'*S_4, *del quarto ordine, con rigata cubica normale doppia*, Atti Acc. Gioenia, (5) 7, (1914), Mem. XXII, pp. 1-21.

gole coppie di punti di m, n situate su rette incidenti ad r (7) stanno in piani anche incidenti ad r, e si proiettano su σ in altrettante rette doppie di W_3^4 incidenti a d.

Tra le proiezioni particolari della V_3^4 di S_6, che non discutiamo minutamente, rileviamo solo la V_3^4 di S_4 con piano triplo, che si ha quando r sta nell'S_4 d'una rigata cubica della V_3^4 di S_6, rigata che può anche spezzarsi in un piano della V_3^4 e nella quadrica direttrice minima (8).

Le V_3^4 qui considerate sono le sole V_3^4 irriducibili, non coni, a curve-sezioni razionali (9).

2. Consideriamo ora in S_5 una V_3^4 rigata, irriducibile, normale, non cono; essa avrà curve-sezioni ellittiche, perciò sarà la base d'un fascio di quadriche di S_5 (10). Anche questa è notissima (11); la sua proiezione in S_4 da un punto generico O ha una quadrica doppia, traccia del cono quadrico intersezione della quadrica del fascio che passa per O col suo S_4 tangente in O (12). Viceversa, ogni V_3^4 irriducibile di S_4, non cono, a curve-sezioni ellittiche, è proiezione della precedente (13).

3. Fermiamoci sulle V_3^4 irriducibili, rigate, non coni, normali in S_4. Gli ∞^1 S_3 tangenti ad una tale V_3^4 nei punti d'una generatrice generica g inviluppano, di regola, un cono quadrico di 2ª specie avente g come retta doppia, ma possono formare fascio intorno ad un piano contenente g e che

(7) Rappresentando V_3^4 su un S_3 col sistema lineare ∞^6 di tutte le quadriche contenenti una stessa retta [Segre, loc. cit., nota (3)], le rette dell'S_3 rappresentano coniche di V_3^4.

(8) Quest'ultimo caso è noto: v. Fano, *Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni proiettive in sè*, Atti Ist. Veneto, (7) 7 (1895-1896), pp. 1069-1103, n. 4.

(9) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*, Math. Ann, 46 (1895), pp. 179-199, n. 9 (ed anche la nota dello stesso A.: *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche*, questi Rend., (5) 2 (1893_2), pp. 281-287, nota (3) a p. 282).

(10) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche*, questi Rend., (5) 3 (1894_1), pp. 481-487, § 3 (vedi anche, nei Math. Ann., il n. 13 della Nota dello stesso A. citata nella nota prec.).

(11) Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Mem. Acc. Torino, (2) 36 (1885), pp. 3-86, parte II.

(12) Casi speciali della V_3^4 di S_4 con F^2 doppia si trovano in: Snyder, *On cyclical Quartic Surfaces in Space of N dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc., (2) 6 (1899-1900), pp. 194-198; Aprile, *Di alcune congruenze, d'ordine due, di superficie nell'* S_4 *e di coniche nell'* S_3, Mem. Acc. Acireale, (3) 10 (1918-1919), § 2. Altri casi speciali notevoli sono: la V_3^4 luogo delle rette incidenti a due coniche generiche di S_4, la V_3^4 luogo delle rette che uniscono punti omologhi di due piani generici di S_4 riferiti in corrispondenza quadratica.

(13) Enriques, loc. cit. nella nota (10), § 1.

risulta tangente a V_3^4 lungo g, oppure possono coincidere tutti in uno stesso S_3 tangente a V_3^4 lungo g ([14]). Siano: α un piano generico contenente g, γ la cubica piana intersezione ulteriore di α con V_3^4, ed A, B, C i punti comuni a g e γ. Nel 1° caso, due di questi punti, ad es. A, B, son punti di contatto di α con V_3^4, e C è punto doppio di V_3^4; il luogo di C, non potendo essere una linea direttrice di V_3^4 ([14]), sarà un piano π, doppio per V_3^4, unisecante le generatrici di V_3^4 (nn. 1 e 2).

Viceversa, una V_3^4 di S_4 con piano doppio π ([15]) è rigata, perchè luogo di ∞^1 quadriche a due dimensioni situate negli S_3 passanti per π, e non ammette, in generale, degli spazî tangenti fissi lungo ogni generatrice.

4. Se invece V_3^4 ammette lungo g un piano tangente fisso, uno solo dei punti A, B, C, ad es. A, è punto di contatto di α con V_3^4, mentre B, C sono multipli per V_3^4.

a) Se B, C sono distinti, e perciò doppî per V_3^4, essi non possono descrivere entrambi una superficie, doppia per V_3^4, perchè questa verrebbe di ordine > 1; nè possono descrivere due linee direttrici di V_3^4 (o un'unica direttrice bisecante le generatrici di V_3^4), se no V_3^4 avrebbe lungo g un S_3 tangente fisso ([14]); perciò B, ad es., descrive un piano doppio π, e C descrive una linea doppia irriducibile L, unisecante le generatrici di V_3^4, la quale sarà quindi un caso speciale di quella del n. 3. Un S_3 generico contenente π sega ancora V_3^4 in una quadrica irriducibile che ha su ogni generatrice un punto doppio di V_3^4 non situato su π, e che perciò è un cono col vertice su L. Cioè L è luogo dei vertici di detti coni, ed è incontrata in un sol punto variabile dagli S_3 contenenti π; perciò L non può essere di ordine ≥ 5, se no un S_3 generico taglierebbe V_3^4 in una F^4 avente una retta doppia e, fuori di questa, almeno 5 punti doppî, tra i quali almeno due dovrebbero stare su una retta incidente a π ([16]), e quindi anche in un S_3, certo variabile, contenente π. Se poi L sta in un piano, segante π in un punto solo, essa è di ordine ≤ 3, perchè una retta generica del suo piano, essendo sghemba con π, sarebbe doppia per V_3^4 se ne contenesse più di tre punti doppî. Dunque L può essere: una retta sghemba con π; una conica incidente a π; una C^3 piana con un punto doppio su π; una C^3 sghemba con due punti (distinti o no) su π; una C^4 di 2ª specie, di un S_3, con tre punti allineati (distinti o no) su π; una C^4 razionale normale con tre punti (distinti o no) su π.

([14]) Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazî*, Rend. Palermo, 30 (1910_2), pp. 87-121, nn. 9, 12 e § 5, 6.

([15]) Marletta, *Sulle varietà del quarto ordine con piano doppio dello spazio a quattro dimensioni*, Giorn. di Matem., 40 (1902), pp. 265-274, 41 (1903), pp. 47-61 e 113-128.

([16]) Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, II Theil, 3 Aufl., 1880, n. 337 a p. 445. V. anche Marletta, loc. cit. nella nota ([15]), n. 54; in quest'ultimo lavoro (nn. 51, 52, 53) si trovano gran parte delle V_3^4 qui determinate.

Scegliendo convenientemente in S_4 un sistema di coordinate proiettive omogenee $x_0 x_1 x_2 x_3 x_4$, è ovvio scrivere l'equazione di V_3^4 nei primi tre casi. Nel 4° e nel 6° caso, nelle ipotesi più generali, l'equazione di V_3^4 si ha uguagliando a zero una forma quadratica generica delle forme: $x_2 x_3$, $x_2 x_4$, $x_3^2 - x_0 x_4$, $x_4^2 - x_1 x_3$, o rispett. delle forme: $x_3 \alpha_1^{(i)}(x_0 x_1 x_2 x_3 x_4) + x_4 \beta_1^{(i)}(x_0 x_1 x_2 x_3 x_4)$ per $i = 0, 1, 2$ ([17]). Nel 5° caso l'equazione di V_3^4 si può scrivere:

$$x_2^2 \varphi_2(x_3 x_4) + x_2 \psi_1(x_3 x_4) f + x_2 g + f^2 = 0,$$

con:

$$f \equiv x_3 \alpha_1(x_0 x_1 x_2 x_3 x_4) + x_4 \beta_1(x_0 x_1 x_2 x_3 x_4);$$

$$g \equiv x_3^2 \mu(x_0 \ldots) + x_3 x_4 \nu(x_0 \ldots) + x_4^2 \pi(x_0 \ldots).$$

b) In secondo luogo, se i punti B, C coincidono in un punto doppio per γ e triplo per V_3^4, essi descrivono una linea tripla irriducibile di V_3^4, L, unisecante le generatrici, e che può esser solo una retta, od una conica: $x_3 = x_4 = \varphi_2(x_0 x_1 x_2) = 0$ ([18]). Nel 2° caso l'equazione di V_3^4 si può scrivere:

$$\varphi_2(x_0 x_1 x_2)\, \psi_2(x_3 x_4) + \sum_{i=0}^{3} \alpha_1^{(i)}(x_0 x_1 x_2 x_3 x_4)\, x_3^{3-i} x_4^i = 0,$$

e mostra che il piano della conica è doppio per V_3^4. Se la conica si spezza in due rette distinte, la V_3^4 è caso speciale di entrambe le precedenti e contiene due sistemi di rette; la conica tripla può anche ridursi ad una retta da contar due volte ([19]).

([17]) Indicheremo con $\alpha, \beta, \varphi, \psi, \ldots$ forme algebriche delle variabili indicate e dei gradi espressi dai loro indici. Non ci fermiamo sui casi speciali in cui V_3^4 acquista generatrici doppie o punti doppî isolati.

([18]) Perchè se L non fosse piana, il piano di tre suoi punti generici starebbe su V_3^4; e se L, di ordine ≥ 3, stesse in un piano π, un piano contenente una retta s di π segherebbe V_3^4 lungo s contata almeno 3 volte, cioè π sarebbe almeno triplo per V_3^4.

([19]) Un caso speciale in Fano, loc. cit. nella nota ([8]), n. 12.

Paleontologia. — *Patologia di alcuni mammiferi pliocenici e postpliocenici della Toscana.* Nota di Lina Pieragnoli, presentata dal Socio C. De Stefani (1).

Trattasi di alcune ossa plioceniche e post-plioceniche di varî animali, specialmente di *Equus* Limn. e di varia località, in massima parte del Valdarno superiore: appartengono tutte al Museo di Firenze: presentano varie lesioni, ma, eccettuato forse in un osso di *Cervus*, non trovo tubercolosi in nessuna di queste ossa, mentre la ritrovai frequentissima ed estesissima nell'*Ursus spelaeus* Blum. recente di Equi (2). Trovo invece lesioni e deformazioni ossee che mancano nelle innumerevoli ossa fossili paleolitiche e neolitiche della Grotta di Equi. Da questa osservazione si potrebbe desumere che alcune malattie furono più particolarmente proprie di alcuni animali, come del resto anche oggi, e forse che hanno avuto maggior sviluppo in alcune epoche piuttosto che in altre, come già aveva ritenuto il Moodie.

* * *

1. *Equus Stenonis* Cocchi. — Articolazione tibio-metarsale sinistra. Pliocene lacustre di Olivola in Val di Magra.

Il metatarso presenta nella diafisi e nella epifisi superiore una esostosi grandissima, compenetrata interamente, come le due ossa (tibia metatarso), da carbonato di Ca. È un caso molto comune anche nel cavallo attuale. Trattasi di una osteo-artrite intertarsica ossificante o, com'è chiamata più comunemente, *artrite secca* del garetto del cavallo. La malattia ha principio da una osteite rarefacente semplice dell'*os tarsi*, in seguito alla quale si ha condensazione del tessuto osseo e degenerazione dello strato cartilagineo con osteite condensante e formazione di esostosi nel 3° tarsale e negli altri tarsali. Quando la malattia è assai avanzata, come in questo caso, le superfici articolari sono saldate per la formazione di granulazioni, che sorgono, come isolotti, nei punti opposti e corrispondenti alle erosioni, che crescendo si saldano le une alle altre. Gli osteofiti che si formano dal periostio, in parte per la tendenza delle osteiti centrali a spingersi verso la periferia, in parte perchè il periostio degli orli articolari viene coinvolto nel processo, possono essere di tutte le forme e di tutte le dimensioni. Considerai inutile

(1) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

(2) *Patologia dell'Ursus spelaeus della Grotta di Equi*, Pieragnoli, R. Acc. dei Lincei, estratto dal vol. XXIX, serie 5ª, fazc. 11, sem. 1°, seduta del 4 giugno 1920.

fare sezioni microscopiche dell'osso e sciuparlo, perchè completamente calcificato.

2. *Equus Stenonis* Cocchi. — Pliocene lacustre del Valdarno superiore.

Metacarpale il cui tessuto è in condizioni normali, benchè compenetrato quasi totalmente da carbonato di Ca e ossido di Fe. Nel centro della diafisi si presenta un rigonfiamento liscio, regolare, molto visibile che si estende anche verso le epifisi. Io credo debba trattarsi di un osteoma, che può avere origine traumatica e provenire dal callo: è un tumore osseo di struttura compatta (eburneo), circoscritto, forse proveniente dallo strato corticale dell'osso.

3. *Equus caballus* Linn. (*Equus Larteti* Cocchi). — Ramo mandibolare destro e sinfisi di un individuo vecchio. Nel canale maestro della Chiana presso Alberolo (prov. Arezzo): post-pliocene. Questo ramo mandibolare è stato oggetto di studio da parte del prof. Arnone (*Comparazioni antropologiche*, estratto dagli Annali di odontologia, 1° sett. 1917; e *Studio nei fossili sugli effetti della carie dei denti*, estratto dagli Annali di odontologia, anno V, n. 2, pag. 25, 1920).

La mandibola è mancante del 3° premolare e la cavità di questo dente è spugnosa e rarefatta: inoltre in corrispondenza di questo dente mancante, al margine inferiore dell'osso, si vede un osteoma rotondo, peduncolato, e vicino il peduncolo più sottile di un altro, perdutosi *post-mortem*. Il professore Arnone ritiene che il dente mancante fosse cariato, e siccome il processo di carie può passare al pericemento e da qui propagarsi al periostio alveolare ed osseo, ritiene anche che in questo caso esso si sia propagato lentamente attraverso il forame apicale della radice stessa al tavolato interno dell'osso, raggiungendo il margine inferiore del mascellare e determinando per la forte infiammazione le esostosi. Questa ipotesi egli avvalora col fatto di una linea di frattura derivante dalla fossilizzazione, a decorso irregolare, che dall'alveolo dove era il dente cariato va al punto dove si ha l'esostosi e che, essendo spezzata due volte, dimostrerebbe la differenza della rarefazione della parete esterna.

Esaminando quest'osso, ho notato subito che il tavolato esterno era perfettamente sano e che l'alveolo del dente non mostrava nessuna lesione dovuta a forte suppurazione e ad osteite: vi è solamente un poca di rarefazione, rarefazione che notasi anche nei margini degli alveoli dei molari e che con tutta probabilità è dovuta a vecchiaia; anormalità che ho avuto agio di notare anche in molti mascellari di *Ursus* vecchio della Grotta di Equi. Inoltre la frattura di cui parla il prof. Arnone nel suo lavoro, che è semplicemente dovuta alla compressione avvenuta durante la fossilizzazione, si dirama attraverso l'osteoma in altre due linee di frattura che si allungano per tutto il margine inferiore dell'osso e che sono più regolari della prima, perchè in quella direzione le trabercole sono parallele alla linea di frattura, mentre

nella parte anteriore sono perpendicolari. Come ben dice il prof. Arnone, senza esame microscopico dell'osteoma che mostri la disposizione delle trabecole ossee nei canali di Havers (cosa impossibile a farsi senza sciupare il fossile) o senza analizzare attentamente l'interno dell'osso, non potevasi sostenere l'ipotesi che si trattasse di un semplice osteoma; siccome però i pezzi dell'osso erano tenuti insieme da mastice, ho potuto dividerli gli uni dagli altri e mettere in evidenza anche la parte interna. Così mi sono assicurata che l'alveolo del dente mancante non presenta alcuna anormalità e che l'interno dell'osso è perfettamente sano, non mostrando alcuna modificazione dovuta a qualsiasi infiammazione: anche la superficie interna inferiore dell'osso che corrisponde all'osteoma è sana: trattasi dunque di un osteoma. Se l'esostosi fosse dipendente da un processo di carie (molto simile alla fistola dentaria), l'osteoma sarebbe meno regolare e la suppurazione che avrebbe dovuto essere abbondantissima per produrre una tale esostosi, avrebbe anche dovuto produrre delle lesioni ossee, che, se quasi invisibili all'esterno, dovevano essere visibilissime all'interno dell'osso.

4. *Cervus* sp. metatarsale sinistro. — Pliocene lacustre del Valdarno Sup. Collezione Strozzi.

La diafisi dell'osso è rigonfiata con modificazione evidente del tessuto, con fori dai quali doveva fuoruscire il pus. Se non è stata una infezione consecutiva a una ferita o ad una frattura, può trattarsi con molta probabilità di un caso di tubercolosi: si nota una corrosione lacunare a fori grossolani, delle caverne riempite ed orlate di osteofiti spugnosi e verrucosi, proprî della tubercolosi.

5. *Rhinoceros etruscus* Falc. — Tibia e perone sinistro, pliocene lacustre. Poggio di Monte al Pero presso Figline. Valdarno superiore.

Periostite consecutiva alla frattura del perone stesso. Dopo la frattura si è formato un processo d'infiammazione e forse di suppurazione, dopo il quale è sopraggiunta una osteite condensante, che ha legato il perone alla tibia. Il perone è risaldato, ma deforme.

6. *Bison priseus* Owen. — Cranio Post-pliocene, nelle sabbie del torrente Maspino presso Arezzo.

Porta sulla bozza frontale sinistra un grosso foro, con incrinature multiple e irregolari delle pareti, che limitano il foro stesso. La ferita è stata prodotta dalle zanne di un altro animale o piuttosto dalla cornata di un altro bisonte, ed ha portato l'infiammazione dell'osso poi risarcito in vita.

G. C.